Programa de Iniciação Científica OBMEP
PIC 2021

Avaliação - Ciclo I

Dados de Identificação	
Curso:	Programa de Iniciação Científica
Nome:	
Nível:	
Multiplicidade:	
Assinatura:	
Data de entrega:	

Sumário

1 Avaliação Online

Questão 1 *(5 pontos)*

O carbono 14, indicado por C^{14}, é um isótopo radioativo do carbono, formado na atmosfera devido ao bombardeio da Terra por raios cósmicos. Através dos tempos, a quantidade de C^{14} na atmosfera tem se mantido constante porque sua produção é compensada por sua desintegração. Os seres vivos absorvem e perdem C^{14} de modo que, em cada espécie, a taxa de C^{14} também se mantém constante (o carbono 14 é criado nos vegetais durante o processo de fotossíntese e absorvido pelos animais através da ingestão, direta ou indireta, de vegetais). Quando o ser morre, a absorção cessa, mas o C^{14} neles existente continua a desintegrar-se. Este fato pode ser usado para determinar a idade de um fóssil ou de um objeto muito antigo feito de madeira. Para isto, precisamos saber que a meia-vida do C^{14} é de 5730 anos (*meia-vida* de uma substância é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade).

(a) Seja M_0 a massa de C^{14} em uma dada amostra, no tempo $t = 0$. Calcule a massa $M(t)$ de C^{14} na amostra, no tempo t, em anos.

(b) Qual porcentagem aproximada de uma amostra inicial de C^{14} resta após 33450 anos?

(c) A quantidade de C^{14} em um fóssil é igual a $\dfrac{3}{10}$ da quantidade de C^{14} de um ser vivo atual. Qual é a idade aproximada desse fóssil?

Solução:

(a) Pondo a massa $M(t)$ de C^{14} como sendo dada por $M(t) = M_0 b^t$, com t em anos, onde $M_0 = M(0)$ é a massa inicial de C^{14}, tem-se $M(5730) = M_0 b^{5730} = \dfrac{M_0}{2}$. Assim, $b^{5730} = \dfrac{1}{2}$ e, logo,

$$b = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}} = 2^{-\frac{1}{5730}}$$

. Portanto, $M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$.

(b) Como $M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$, então $M(33450) = M_0 \cdot 2^{-\frac{33450}{5730}} \approx M_0 \cdot 2^{-5,838} \approx 0,0175 \cdot M_0$, que é $1,75\%$ de M_0.

(c) Como $M(t) = M_0 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$, tem-se $2^{-\frac{t}{5730}} = \dfrac{M(t)}{M_0} = \dfrac{3}{10}$. Assim, $-\frac{t}{5730} \cdot \log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{3}{10} = \log_{10} 3 - \log_{10} 10 = \log_{10} 3 - 1$ e, portanto,

$$t = 5730\left(1 - \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}\right) \approx 5730\left(1 - \frac{0,477}{0,301}\right) \approx 9956.$$

Logo, a idade aproximada do fóssil é 9956 anos.

Questão 2 *(5 pontos)*

Newton estabeleceu que o resfriamento de um corpo no meio ambiente obedece à seguinte equação:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a) \cdot e^{-kt}$$

onde $T(t)$ é a temperatura do corpo (em graus Celsius) no momento t (em minutos), T_a é a temperatura do meio ambiente, T_0 é a temperatura inicial e k é a constante de resfriamento que depende do material do qual o corpo é feito, sua massa e sua condutividade térmica. Suponha que uma pessoa prepara café e após 3 minutos a temperatura do café é de 70°C. Ela aguarda outros 3 minutos e nesse momento a temperatura do café é de 52°C.

(*a*) Se a temperatura do meio ambiente é de 25°C, calcule o valor de k (em função do logaritmo natural de números a determinar) e a temperatura inicial.

(*b*) Prove que a fórmula de resfriamento desse café é:

$$T(t) = 25 + 75 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{3}}$$

(*c*) Sabendo que essa pessoa gosta de beber o café a 46°C, calcule o valor de t (com aproximação de minutos e segundos) para o qual a temperatura do café é de 46°C.

Solução:

(*a*) Substituindo a informação $T_a = 25°C$ e $T(3) = 70°C$ na fórmula de resfriamento de um corpo, obtemos

$$70 = 25 + (T_0 - 25) \cdot e^{-3k} \Longrightarrow 45 = (T_0 - 25) \cdot e^{-3k}$$

e substituindo a informação $T_a = 25°C$ e $T(6) = 52°C$ na mesma fórmula, obtemos

$$52 = 25 + (T_0 - 25) \cdot e^{-6k} \Longrightarrow 27 = (T_0 - 25) \cdot e^{-6k}.$$

Dividindo a primeira equação obtida pela segunda e simplificando $T_0 - 25$ no numerador e denominador do lado direito, obtemos

$$\frac{45}{27} = \frac{e^{-3k}}{e^{-6k}} \Longrightarrow \frac{5}{3} = e^{3k}.$$

Aplicando logaritmo natural de ambos os lados obtemos:

$$\ln 5 - \ln 3 = 3k \Longrightarrow k = \frac{\ln 5 - \ln 3}{3}.$$

Para encontrar o valor da temperatura inicial, perceba que

$$e^{-3k} = e^{\ln 3 - \ln 5} = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 5}} = \frac{3}{5}.$$

Substituindo esse valor na primeira equação encontrada (para $t = 3$), obtemos

$$45 = (T_0 - 25) \cdot \frac{3}{5} \Longrightarrow T_0 - 25 = 75 \Longrightarrow T_0 = 100°C.$$

(*b*) A fórmula do resfriamento do café é

$$T(t) = 25 + (100 - 25) \cdot e^{-kt},$$

onde $k = \frac{\ln 5 - \ln 3}{3}$. Como vimos acima temos que

$$e^{3k} = \frac{5}{3} \Longrightarrow e^k = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Longrightarrow e^{-kt} = \left(e^k\right)^{-t} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{t}{3}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{3}}.$$

Isso implica que

$$T(t) = 25 + 75 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{3}}.$$

(*c*) De acordo às informações dadas, devemos encontrar o valor de t na equação

$$6 = 25 + 75 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{3}} \Longrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{t}{3}} = \frac{21}{75} = \frac{7}{25}.$$

Aplicando logaritmo natural obtemos

$$\frac{t}{3} \cdot \left(\ln \frac{3}{5}\right) = \ln \frac{7}{25} \Longrightarrow t \cdot (\ln 3 - \ln 5) = 3 \cdot (\ln 7 - \ln 25) = 3 \cdot (\ln 7 - 2 \cdot \ln 5)$$

Assim,

$$t = \frac{3 \cdot (\ln 7 - 2 \cdot \ln 5)}{(\ln 3 - \ln 5)} = \frac{3 \cdot (1,95 - 2 \cdot 1,61)}{1,10 - 1,61} = \frac{-3,81}{-0,51} = 7,47 \text{ minutos.}$$

Com uma aproximação de minutos e segundos, isso corresponde a 7 minutos e 28 segundos.